КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3D моделирование физических процессов

Методы исследования конечно-разностных схем на устойчивость

Лектор: PhD
Максимов Валерий Юрьевич

Метод фон Неймана

Рассмотрим этот метод на примере того же конечно-разностного уравнения:

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + d\left[f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right] \qquad \textbf{(1)}$$

Сеточная функция представляется в виде разложения Фурье:

$$\boxed{f_i^n = V^n e^{I i \theta}}$$

где V^n – амплитуда отдельной компоненты с волновым числом $k_x = \frac{2\pi}{\lambda}$

на n-ном временном слое, где $\theta = k\Delta x$ – фазовый угол, а $\mathrm{I} = \sqrt{-1}$ – мнимая единица

Аналогично

$$\boxed{f_{i\pm1}^{n+1} = V^{n+1} e^{I(i\pm1)\theta}}$$

Подставим эти выражения в уравнение (1):

$$V^{n+1}e^{\mathrm{I}i\theta}=V^{n}e^{\mathrm{I}i\theta}-\frac{c}{2}V^{n}\left(e^{\mathrm{I}(i+1)\theta}-e^{\mathrm{I}(i-1)\theta}\right)+$$

$$+dV^{n}\left(e^{\mathrm{I}(i+1)\theta}+e^{\mathrm{I}(i-1)\theta}-2e^{\mathrm{I}i\theta}\right)\qquad (2)$$

Разделив (2) на $\boldsymbol{e^{I\,i\,\theta}}$, получим:

$$V^{n+1}=V^{n}\left[1-\frac{c}{2}\left(e^{\mathrm{I}\theta}-e^{-\mathrm{I}\theta}\right)+d\left(e^{\mathrm{I}\theta}+e^{-\mathrm{I}\theta}-2\right)\right]\qquad (3)$$

Учтем, что $\boldsymbol{e^{I\theta}+e^{-I\theta}=2\cos\theta}$,

$$\boldsymbol{e^{I\theta}-e^{-I\theta}=2\,I\sin\theta}$$

Тогда $V^{n+1}=V^{n}\,[1-2d(1-\cos\theta)-IC\sin\theta]$

Определим множитель перехода *G* следующим образом:

$$\boxed{V^{n+1}=GV^{n}}$$

Для того чтобы решение оставалось устойчивым, необходимо потребовать, чтобы $\boxed{|G|\leq 1.}$

В данном случае множитель перехода равен:

$$G=1-2d(1-\cos\theta)-IC\sin\theta$$

Он является комплексным выражением, поэтому условие устойчивости $|G|\leq 1$ приводится к неравенству:

$$[1-2d(1-\cos\theta)]2-C2\sin 2\theta \leq 1$$

Сделав соответствующие преобразования, получим:

$$C^2(1+\cos\theta) \le 4d[1-d(1-\cos\theta)]$$

Рассмотрим два предельных случая.

$$a)\ \cos\theta=-1:\ \ 0 \le 4d(1-2d).$$

Отсюда получаем первое условие устойчивости:

$$\boxed{d \le \frac{1}{2}}$$

Такое же условие было получено методом дискретных возмущений.

$$б)\ \cos\theta=1:$$

$$\boxed{2C^2 \le 4d \Rightarrow C^2 \le 2d}$$

Учитывая предыдущее неравенство $2C^2 \le 4d \Rightarrow C^2 \le 2d,$

получим второе условие: $C \le 1.$

Комбинируя эти два условия, можно получить условие устойчивости в следующем виде:

$$\boxed{\Delta t \le \frac{2a}{u^2} \quad \text{или} \quad Pe_c \le 2.}$$

Все эти полученные условия справедливы только в случае линейного уравнения при *u=const.*